Multiplicatieve functies

1 Definitie

Een rekenkundige functie is een functie $f :: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. Een rekenkundige functie drukt een zekere eigenschap van de natuurlijke getallen uit.

Definitie 1.1. Een rekenkundige functie f is *multiplicatief* als voor elk tweetal onderling ondeelbare getallen m en n geldt dat

$$f(m.n) = f(m).f(n)$$

Omdat elk natuurlijk getal ontbonden kan worden in priemfactoren, is een multiplicatieve functie gekend als je de beelden van de priemfactoren kent. We geven enkele evidente eigenschappen van deze multiplicatieve functies:

Stelling 1.2. *Als f een multiplicatieve functie is, dan is $f(1) = 1$ ofwel is $f \equiv 0$.*

Bewijs. We weten dat $f(n) = f(n.1) = f(n).f(1)$. Als $f(1) = 0$, dan is $f(n) = 0$ voor elk natuurlijk getal n en dus is $f \equiv 0$. Als $f(1) \neq 0$, dan moet $f(1) = 1$. □

Stelling 1.3. *Het product van twee of meer multiplicatieve functies is ook een multiplicatieve functie.*

Bewijs. Veronderstel dat f en g multiplicatieve functies zijn en dat m en n

onderling ondeelbare natuurlijke getallen zijn, dan is

$$\begin{aligned}(f.g)(m.n) &= f(m.n).g(m.n)\\ &= f(m).f(n).g(m).g(n)\\ &= (f.g)(m).(f.g)(n)\end{aligned}$$

$\square$

2 Voorbeelden

De constante functie op 1, de identieke functie, een machtfunctie : allemaal evidnete voorbeelden van een multiplicatieve functie.
Elk natuurlijk getal n kan ontbonden worden in priemfactoren. Veronderstel dat $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_r^{\alpha_r}$. Definieer nu de volgende functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$:

- $\tau(n)$ is het aantal postieve delers van n
- $\sigma(n)$ is de som van alle postieve delers van n
- $\pi(n)$ is het product van alle postieve delers van n

Stelling 2.1. *De functie τ is multiplicatief.*

Bewijs. Om het aantal delers van n te berekenen schrijven we n in zijn priemontbinding. Een deler is bepaald door de keuze van de macht van een priemfactor. Daardoor is

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{r}(\alpha_i + 1)$$

Omdat n en m onderling ondeelbaar zijn, hebben n en m geen priemfactor gemeenschappelijk en kunnen we m schrijven als $m = q_1^{\beta_1}.q_2^{\beta_2}.\cdots.q_s^{\beta_s}$. Dan is:

$$\begin{aligned}\tau(n.m) &= \prod(\alpha_i + 1).(\beta_j + 1) \text{ met } i = 1, \cdots, r \text{ en } j = 1, \cdots, s\\ &= \prod(\alpha_i + 1).\prod(\beta_j + 1)\\ &= \tau(n).\tau(m)\end{aligned}$$

$\square$

Stelling 2.2. *De functie σ is multiplicatief.*

Bewijs. We proberen eerst een expliciete formule af te leiden voor de som van alle delers van n. $\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{0\leq\mu_i\leq\alpha_i}\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\mu_i}\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{\mu_i=0}^{\alpha_i} p_i^{\mu_i}\right)$ Door gebruik te maken van de som van de termen van een meetkundige rij vinden we:

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

Omdat n en m onderling ondeelbaar zijn, hebben n en m geen priemfactor gemeenschappelijk en kunnen we m schrijven als $m = q_1^{\beta_1}.q_2^{\beta_2}.\cdots.q_s^{\beta_s}$. Dan is:

$$\begin{aligned}
\sigma(n.m) =& \prod \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\frac{q_j^{\beta_j+1}-1}{q_j-1} \text{ met } i=1,\cdots,r \text{ en } j=1,\cdots,s\\
=& \prod \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.\prod \frac{q_j^{\beta_j+1}-1}{q_j-1}\\
=& \sigma(n).\sigma(m)
\end{aligned}$$

□

Stelling 2.3. *De functie π is niet multiplicatief.*

Bewijs. We geven een tegenvoorbeeld. Neem $n = 3$ en $m = 4$. Dan is $\pi(3.4) = \pi(12) = 1.2.3.4.6.12 = 1728$. Maar $\pi(3).\pi(4) = (1.3).(1.2.4) = 24$ □

Naar analogie met de vorige bewijzen willen we toch een formule geven om $\pi(n)$ te berekenen. Als n geen volkomen kwadraat is dan komen alle delers in koppels voor: d en $\frac{n}{d}$. Het product van die twee delers is n. Er zijn zo $\frac{\tau(n)}{2}$ koppels , dus is

$$\pi(n) = 2^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

Als n een volkomen kwadraat is, dan zijn er $\frac{\tau(n)-1}{2}$ koppels en 1 deler apart, namelijk $\sqrt{n}$. Het product van alle delers is dan $2^{\frac{\tau(n)-1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}$ en zo vinden we dezelfde uitkomst als hierboven.

3 De Möbius en Dirichlet functie

Een somfunctie van een rekenkundige functie f, genoteerd als S_f is een rekenfundige functie waarvoor geldt dat:

$$S_f(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

Noteer de functies $I(n) = 1$ en $Id(n) = n$, dan geldt $S_I = \tau$ en $S_{Id} = \sigma$. Nu weten we dat I, Id, τ en σ multiplicatieve functies zijn. Zou het kunnen dat de somfunctie van een multiplicatieve functie, terug een multiplicatieve functie is?

Stelling 3.1. *Een rekenkundige functie f is multiplicatief als en slechts als zijn som functie S_f multiplicatief is.*

Bewijs. Veronderstel eerst dat f multiplicatief is en dat $x_1, x_2, \cdots, x_k$ alle delers zijn van x en $y_1, y_2, \cdots, y_l$ alle delers van y. Veronderstel ook dat x en y onderling ondeelbaar zijn. Hieruit volgt dat elke x_i onderling ondeelbaar is met elke y_j en dat de verzameling $\{x_i y_j\}$ alle delers bevat van xy. Dan geldt:

$$\begin{aligned} S_f(x).S_f(y) =& \sum_{i=1}^{k} f(x_i). \sum_{j=1}^{l} f(y_j) \\ =& \sum_{i,j} f(x_i)f(x_j) \\ =& \sum_{i,j} f(x_i y_j) \\ =& S_f((xy) \end{aligned}$$

Bijgevolg is S_f multiplicatief.
Veronderstel nu dat S_f multiplicatief is. Neem twee getallen n_1 en n_2 die onderling ondeelbaar zijn en met $n = n_1 n_2$. We bewijzen door inductie op n, dat $f(n) = f(n_1)f(n_2)$. Voor $n = 1$ is $f(1) = S_f(1)(= 1$ of $0)$ en dus geldt de eigenschap zeker al voor $n = 1$. Veronderstel dat de eigenschap klopt voor

alle $m_1 m_2 < n$. Dan is:

$$
\begin{aligned}
S_f(n) &= \sum_{d_i | n_1, d'_j | n_2} f(d_i d'_j) \\
&= \sum_{d_i d'_j < n} f(d_i d'_j) + f(n_1 n_2) \\
&= \sum_{d_i d'_j < n} f(d_1) f(d'_j) + f(n_1 n_2)
\end{aligned}
$$

Anderzijds geldt er ook dat:

$$
\begin{aligned}
S_f(n_1) S_f(n_2) &= \sum_{d_i | n_1} f(d_i) \sum_{d'_j | n_2} f(d'_j) \\
&= \sum_{d_i d'_j < n} f(d_1) f(d'_j) + f(n_1) f(n_2)
\end{aligned}
$$

Omdat S_f multiplicatief is, volgt hieruit dat $f(n) = f(n_1) f(n_2)$ en dus is ook f multiplicatief. $\square$

Merk op dat als $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}. \cdots .p_r^{\alpha_r}$, we de som functie van een multiplicatieve functie f kunnen schrijven als

$$
S_f(n) = \prod_{i=1}^{r} (1 + f(p_i) + f(p_i^2) + \cdots + f(p_i^{\alpha_i}
$$

De klassieke Möbiusfunctie μ is een belangrijke multiplicatieve functie in getaltheorie en combinatoriek. Ze is vernoemd naar de Duitse wiskundige August Ferdinand Möbius (1790-1868), door wie deze functie werd geïntroduceerd in 1831.

Definitie 3.2. We definieren de functie $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ als:

- $\mu(n) = 1$ als n een positief kwadraatvrij geheel getal is met een even aantal verschillende priemfactoren.
- $\mu(n) = -1$ als n een positief kwadraatvrij geheel getal is met een oneven aantal verschillende priemfactoren.
- $\mu(n) = 0$ als n niet kwadraatvrij is.

Zo is $\mu(6) = 1$ (twee priemfactoren: 2 en 3), $\mu(7) = 1$ (één priemfactor 7) en $\mu(8) = 0$ (niet kwadraat vrij want 4 deelt 8).
Een andere belangrijke functie is de Dirichlet functie δ die overal de waarde 0 aanneemt behalve als $n = 1$, dan is ze 1.

Stelling 3.3. *De Dirichlet functie δ is multiplicatief*

Bewijs. Omdat de somfunctie van de Dirichlet functie, de constante functie op 1 is, volgt het te bewijzen uit vorige stelling. □

Stelling 3.4. *De Möbius functie μ is multiplicatief*

Bewijs. Berekenen we de som functie van de Möbius functie. Wanneer de exponent van een priemfactor van n groter is dan 1, is het beeld ervan onder de Möbius functie gelijk aan 0. We zijn dus enkel geïnteresseerd in de delers die het product zijn van de priemfactoren, dus niet van machten ervan. De som van de beelden onder de Möbius functie is $1-\binom{r}{1}+\binom{r}{2}+\cdots = (1-1)^r = 0$. Bijgevolg is de somfunctie van de Möbius functie, de Dirichlet functie en volgt het te bewijzen uit vorige stelling. □

4 De Euler functie

In de getaltheorie is de indicator of totiënt van een positief natuurlijk getal n, genoteerd als $\varphi(n)$, het aantal positieve natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan n die onderling ondeelbaar zijn met n. Zo is bijvoorbeeld $\varphi(8) = 4$, omdat van elk van de vier oneven getallen 1, 3, 5 en 7 onderling ondeelbaar zijn met 8. Voor een priemgetal p is $\varphi(p) = p - 1$. Ook geldt er dat $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
Deze functie wordt veelal in verband gebracht met de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler, die deze functie uitgebreid bestudeerde en wordt dus ook dikwijls de Euler functie genoemd.

Stelling 4.1. *De Euler functie φ is multiplicatief*

Bewijs. Neem 2 getallen a en b die onderling ondeelbaar zijn en ranschik alle getallen van 1 tot ab in een schema als volgt:

1	2	$\cdots$	i	$\cdots$	$a-1$	a
$a+1$	$a+2$	$\cdots$	$a+i$	$\cdots$	$2a-1$	$2a$
$2a+1$	$2a+2$	$\cdots$	$2a+i$	$\cdots$	$3a-1$	$3a$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$ja+1$	$ja+2$	$\cdots$	$ja+i$	$\cdots$	$(j+1)a-1$	$(j+1)a$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(b-2)a+1$	$(b-2)a+2$	$\cdots$	$(b-2)a+i$	$\cdots$	$(b-1)a-1$	$(b-1)a$
$(b-1)a+1$	$(b-1)a+2$	$\cdots$	$(b-1)a+i$	$\cdots$	$ba-1$	ba

Als een element $ja+i$ relatief priem is met a, dan is elk element van de i-de kolom relatief priem met a. Nu zijn er in de eerste rij juist $\varphi(a)$ elementen die onderling ondeelbaar zijn met a en dus die $\varphi(a)$ kolommen bevatten al de elementen in het schema die onderling ondeelbaar is met a.
Omdat a en b onderling ondeelbaar zijn, is het duidelijk dat de b elementen van een kolom bij deling door b allemaal een verschillende rest geven. Er zjn met andere woorden in elke kolom juist $\varphi(b)$ elementen die onderling ondeelbaar zijn met b. Bijgevolg zijn er $\varphi(a).\varphi(b)$ elementen in het schema die relatief priem zijn met a en b, dus met ab. Maar dan is $\varphi(a).\varphi(b) = \varphi(ab)$ en dus is de Euler functie multiplicatief.

$\square$

Nog enkele opmerkingen:

- Net omdat de Euler functie multiplicatief is, kunnen we een expliciet voorschrift geven. We nemen de ontbinding in priemfactoren van n en dan geldt er dat $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{r} \Big(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}\Big) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big)$. Dus:

$$\varphi(n) = n\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_2}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{1}{p_r}\Big)$$

- We bepalen de somfunctie van de Eulerfunctie. Omdat de Euler functie multiplicatief is, is de som functie dat ook zodat $S_\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} S_\varphi\Big(p_i^{\alpha_i}\Big)$. Het probleem wordt zo herleid tot het bepalen van $S_\varphi\Big(p_i^{\alpha_i}\Big)$. Maar dat is $1 + p_i - 1 + p_i^2 - p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1} = p_i^{\alpha_i}$. Bijgevolg is inderdaad $S_\varphi(n) = n$ en is de som functie van de Eulerfunctie de identieke functie.